پاسخ آزمون )۴( ریاضی/ تاریخ : ۱۴۰۲/۱۲/۲۸به نام خدا تعداد سوال: ۵۰ / زمان : ۷۵ دقیقه

## تست و پاسخ ۱

اگر نمودار تابع f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، سپس ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم و طول نقاط را دو برابر کنیم، به کدام گزینه می‌رسیم؟

$x \to \frac{x}{۲}$

$-f(-x)$

۱) $y=-f(-۲x-۳)$

۲) $y=-f(۶-\frac{x}{۲})$

۳) $y=-f(۳-۲x)$

۴) $y=-f(۳-\frac{x}{۲})$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

درس‌نامه •• انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض

| | نمودار چه می‌شود؟ | نماد ریاضی |
|---|---|---|
| انتقال | a واحد به راست | $f(x-a)$ |
| | a واحد به چپ | $f(x+a)$ |
| | b واحد به بالا | $f(x)+b$ |
| | b واحد به پایین | $f(x)-b$ |
| قرینه‌یابی | نسبت به محور xها | $-f(x)$ |
| | نسبت به محور yها | $f(-x)$ |
| | نسبت به مبدأ مختصات | $-f(-x)$ |
| | نسبت به خط $x=k$ | $f(۲k-x)$ |
| | نسبت به خط $y=k$ | $۲k-f(x)$ |
| انبساط و انقباض افقی | انبساط با ضریب $۰<a<۱$ | $f(ax)$ |
| | انقباض با ضریب $a>۱$ | $f(ax)$ |
| انبساط و انقباض عمودی | انبساط با ضریب $a>۱$ | $af(x)$ |
| | انقباض با ضریب $۰<a<۱$ | $af(x)$ |

**تذکر** برای رسم نمودار تابع $y=f(ax)$، طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{a}$ ضرب می‌کنیم.

**پاسخ تشریحی** به ترتیب در هر گام، تغییراتی را که گفته است، بر تابع f اعمال می‌کنیم.

**گام اول:** اول نمودار f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم، پس به $g(x)=-f(-x)$ می‌رسیم.

**گام دوم:** حالا باید $g(x)$ به‌دست‌آمده را ۳ واحد به سمت راست انتقال بدهیم، یعنی باید به جای x، عبارت $x-۳$ را قرار بدهیم، پس به $h(x)=g(x-۳)=-f(-(x-۳))$ می‌رسیم؛ به عبارتی $h(x)=-f(-x+۳)$ می‌شود.

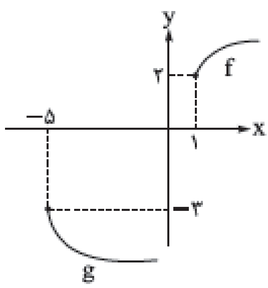
**گام سوم:** طول نقاط $h(x)$ به‌دست‌آمده را باید ۲ برابر کنیم، یعنی $a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{a}=۲$؛ پس طبق درس‌نامه، $y=h(\frac{x}{۲})$ است. در نهایت داریم:

$$y=h(\frac{x}{۲})=-f(\frac{-x}{۲}+۳)$$

پس **۴** درست است.

## تست و پاسخ ۲

**توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ فقط به کمک قرینه‌یابی و انتقال به هم تبدیل شده‌اند. کدام گزینه صحیح است؟**




۱) $g(x)+f(x+۶)=-۱$

۲) $g(x-۶)+۲=f(x)$

۳) $g(-x)+۵=f(x)$

۴) $f(x-۶)-g(x)=۵$

### پاسخ: گزینهٔ ۱

**خودت حل کنی بهتره** به دو نقطه‌ای که در تابع f و g داده‌شده توجه کنید!

**پاسخ تشریحی** از دو نقطه‌ای که روی دو نمودار f و g داده شده، کمک می‌گیریم و از گزینه‌ها استفاده می‌کنیم تا گزینهٔ درست را پیدا کنیم.

**گام اول:** نقطهٔ $(۱,۲)$ روی تابع f و نقطهٔ $(-۵,-۳)$ روی تابع g است. به کمک انتقال و قرینه‌یابی، این دو نقطه به هم تبدیل می‌شوند؛ پس در گزینه‌ها باید به دنبال عبارتی باشیم که دو نقطه در f و g صدق کنند.

$$\begin{cases} f(۱)=۲ \\ g(-۵)=-۳ \end{cases}$$

**گام دوم:** نقاط را در هر کدام از گزینه‌ها جای‌گذاری می‌کنیم:

**۱** $g(x)+f(x+۶)=-۱ \xrightarrow{x=-۵} g(-۵)+f(-۵+۶)=-۳+۲=-۱$ ✓

**۲** $g(x-۶)+۲=f(x) \xrightarrow{x=۱} \begin{cases} g(۱-۶)+۲=-۳+۲=-۱ \\ f(۱)=۲ \end{cases} \Rightarrow$ با هم برابر نیستن.

**۳** $g(-x)+۵=f(x) \xrightarrow{x=۱} \begin{cases} g(-۱)+۵ \\ f(۱)=۲ \end{cases}$

با توجه به نمودار که برای $g(x)$ داده شده، $g(-۱)<-۳$ و در نتیجه $g(-۱)+۵<۲$ است، پس نمی‌تواند با $f(۱)$ برابر باشد.

**۴** $f(x-۶)-g(x)=۵ \xrightarrow{x=-۵}$ $f(-۱۱)$ را نداریم، به عبارتی $x=-۱۱$ جزء دامنهٔ f نیست؛ پس این گزینه هم درست نیست.

**با فرض آن‌که $D_f=[-۱,۲]$ و $R_f=[-۴,۲]$، اگر دامنه و برد تابع $g(x)=a-f(۱-\frac{x}{۲})$ فقط یک عضو مشترک داشته باشند، مقدار a کدام است؟**

۱) $\pm۶$ ۲) $\pm۴$ ۳) $\pm۲$ ۴) صفر

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**پاسخ تشریحی** باید با توجه به دامنه و برد تابع f، دامنه و برد تابع g را به دست بیاوریم.

**گام اول:** اول از روی دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$D_f=[-۱,۲]$$

عبارت $۱-\frac{x}{۲}$ باید در این بازه باشد:

$$-۱\le ۱-\frac{x}{۲}\le ۲ \Rightarrow -۲\le -\frac{x}{۲}\le ۱ \Rightarrow -۴\le -x\le ۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۴$$

پس یعنی دامنهٔ تابع g به صورت $D_g=[-۲,۴]$ است.

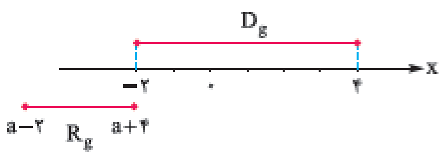
**گام دوم:** حالا از روی برد تابع f، برد تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$R_f=[-۴,۲] \Rightarrow -۴\le f(x)\le ۲ \Rightarrow -۴\le f(۱-\frac{x}{۲})\le ۲ \Rightarrow -۲\le -f(۱-\frac{x}{۲})\le ۴$$

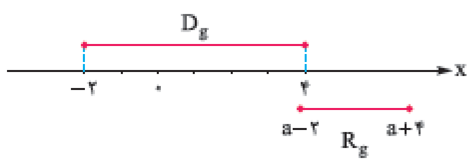
$$\Rightarrow a-۲\le a-f(۱-\frac{x}{۲})\le a+۴ \Rightarrow a-۲\le g(x)\le a+۴$$

یعنی $R_g=[a-۲,a+۴]$ است.

**گام سوم:** دامنه و برد تابع g فقط یک نقطهٔ مشترک دارند. دو حالت می‌توانیم در نظر بگیریم:

۱) 


$$a+۴=-۲ \Rightarrow a=-۶$$

۲) 


$$a-۲=۴ \Rightarrow a=۶$$

پس $a=\pm۶$ است.

**تذکر** دقت کنید که هر دو مقدار به‌دست‌آمده قابل قبول است. چون وقتی $a = ۶$ است، برد تابع $g$ به صورت $[۴, ۱۰]$ می‌شود که اشتراکش با دامنه $\{۴\}$ است و وقتی $a = -۶$ است، برد آن به صورت $[-۸, -۲]$ است که اشتراکش با دامنه $\{-۲\}$ می‌شود.

**تذکر** در نظر داشته باشید که در $R_g$، رابطهٔ $a - ۲ < a + ۴ \Rightarrow -۲ < ۴$ همواره برقرار است. در حل این نوع سؤالات باید شرط بازه‌ها را هم چک کنیم تا محدودیت‌ها را برای پارامتری که می‌خواهیم به دست بیاوریم، اعمال کنیم.

## تست و پاسخ ۴

**$f$ تابعی وارون‌پذیر است و $A(۲,۳)$ روی نمودار $f$ قرار دارد. $A'$ روی نمودار $y = ۲ - ۳f^{-۱}(۲x)$ متناظر با نقطهٔ $A$ است. به همین ترتیب $A''$ نیز نقطهٔ متناظر با $A$ است که روی وارون تابع $y = ۲ - ۳f(۲x)$ قرار گرفته است؛ فاصلهٔ $A'$ تا $A''$ چه‌قدر است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۳۹۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳۸۹}}{۲}$ ۴) صفر

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** در مورد تابع وارون یک نکتهٔ مهم که باید به یاد داشته باشید این است که $f(b) = a \leftrightarrow f^{-1}(a) = b$.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** $f$ تابعی وارون‌پذیر است و نقطهٔ $A(۲, ۳)$ روی این تابع است؛ پس اول از همه می‌فهمیم که نقطهٔ $B(۳, ۲)$ روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد. وقتی می‌گوییم نقطهٔ $A'$ روی نمودار $y$، متناظر با نقطهٔ $A$ است به این معنی است که وقتی روی تابع $f$ تغییراتی اعمال می‌کنیم، نقطهٔ $A$ در تابع جدید $y$، تبدیل به نقطهٔ $A'$ می‌شود. باید مختصات نقطهٔ $A'$ را که روی نمودار $y = ۲ - ۳f^{-۱}(۲x)$ قرار دارد، پیدا کنیم:

$$B(۳, ۲) \in f^{-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۳) = ۲$$

$$y = ۲ - ۳f^{-۱}(۲x) \Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = ۲ - ۳f^{-۱}(۳) = ۲ - ۳ \times ۲ = -۴$$

پس یعنی $A'(\frac{۳}{۲}, -۴)$ روی نمودار تابع $y$ قرار دارد.

**گام دوم:** حالا باید مختصات نقطهٔ $A''$ را که روی وارون تابع $y=۲-۳f(۲x)$ است، پیدا کنیم. برای این کار، از نقطهٔ $A(۲,۳)$ که روی تابع $f$ است کمک می‌گیریم. اول پیدا می‌کنیم که نقطهٔ $A$، در تابع $y$ به چه نقطه‌ای تبدیل می‌شود. داریم:

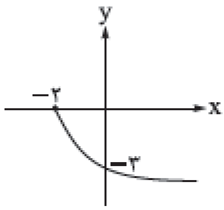
$$\begin{array}{l} f(۲)=۳ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱ \\ y=۲-۳f(۲)=۲-۳\times ۳=-۷ \end{array} \Rightarrow$$ پس یعنی نقطهٔ $(۱,-۷)$ روی تابع $y=۲-۳f(۲x)$ است.

حالا می‌توانیم بگوییم که $A''(-۷,۱)$ روی وارون این تابع قرار دارد.

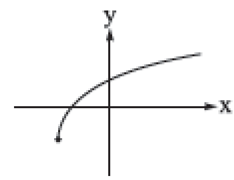
**گام سوم:** با داشتن مختصات دو نقطهٔ $A'$ و $A''$، فاصله‌شان از هم را پیدا می‌کنیم:

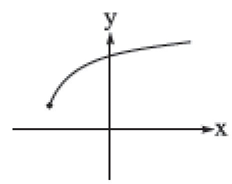
$$A'A''=\sqrt{(\frac{۳}{۲}-(-۷))^۲+(-۴-۱)^۲}=\sqrt{(\frac{۱۷}{۲})^۲+۲۵}=\sqrt{\frac{۲۸۹}{۴}+۲۵}=\sqrt{\frac{۳۸۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۳۸۹}}{۲}$$

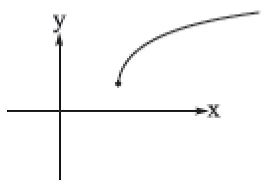
## تست و پاسخ ۵

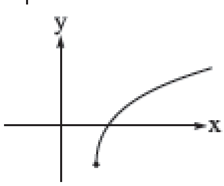



**نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{ax+b}$ به صورت شکل مقابل است. نمودار تابع $g(x)=۲a-f(x-b)$ به کدام صورت است؟**

۱) 


۲) 


۳) 


۴) 


**پاسخ: گزینهٔ ۳**

---

**خودت حل کنی بهتره** دوتا نقطهٔ نمودار در ضابطهٔ تابع $f$ صدق می‌کنند!

**پاسخ تشریحی** اول باید با توجه به شکل، $a$ و $b$ را پیدا کنیم تا بتوانیم تابع $g$ را تشکیل دهیم.

**گام اول:** با توجه به نمودار تابع $f$ که داده شده، دو نقطهٔ $(-۲,۰)$ و $(۰,-۳)$ روی نمودار تابع $f$ هستند؛ پس در ضابطه‌اش صدق می‌کنند. می‌توانیم با این دو نقطه، مقادیر $a$ و $b$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} f(۰)=-۳=-\sqrt{b} \\ f(-۲)=۰ \Rightarrow ۰=-\sqrt{-۲a+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۹ \\ a=\frac{۹}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\sqrt{\frac{۹}{۲}x+۹}$$

**گام دوم:** حالا تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=۲a-f(x-b)=۹-f(x-۹)=۹-(-\sqrt{\frac{۹}{۲}(x-۹)+۹})=۹+\sqrt{\frac{۹}{۲}x-\frac{۶۳}{۲}}$$

**گام سوم:** حالا باید شکل نمودار تابع $g$ را به دست بیاوریم: اول این‌که باید دامنهٔ تابع را مشخص کنیم:

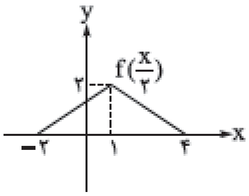
$$\frac{۹}{۲}x-\frac{۶۳}{۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۲}x\geq \frac{۶۳}{۲} \Rightarrow x\geq ۷$$

پس بین ۳ و ۴ یکی جواب است.

به ازای $x=۷$، $g(۷)=۹$ می‌شود، پس ۳ نمودار تابع $g$ را به درستی نشان می‌دهد.

**تنکر** یادتان باشد در این نوع سؤال‌ها، از رد گزینه استفاده کنید و نیازی به رسم دقیق نمودار تابع نیست (با توجه به گزینه‌هایی که داده شده است).

**نمودار $y=f(\frac{x}{2})$ به صورت شکل زیر است. مساحتی که نمودار تابع $g(x)=2f(\frac{2x}{3})$ با محور xها می‌سازد، چه عددی است؟**




۱) ۶ ۲) ۲۴

۳) ۱۲ ۴) ۹

## پاسخ: گزینهٔ ۴

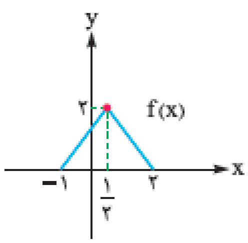
**پاسخ تشریحی** جدولی که در درس‌نامهٔ پاسخ سؤال ۱ بود را که یادتان هست؟ از آن استفاده می‌کنیم تا نمودار تابع g را رسم کنیم.

**گام اول:** سعی می‌کنیم از روی نمودار $y=f(\frac{x}{2})$ که داده شده، ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را پیدا کنیم.

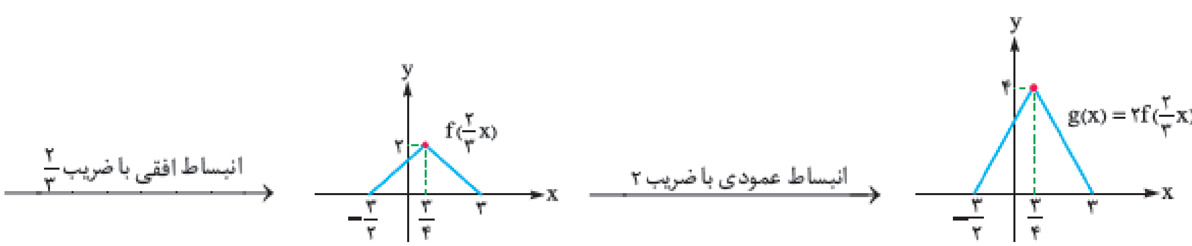
با توجه به درس‌نامهٔ سؤال ۱، xها را با ضریب $\frac{1}{2}$، منقبض می‌کنیم، یعنی:

$$y=f(\frac{x}{2}) \text{ در تابع: } -2\le x\le 4 \xrightarrow{\text{انقباض با ضریب } \frac{1}{2}} -2\le 2x\le 4 \Rightarrow -1\le x\le 2 : f(x) \text{ دامنهٔ تابع}$$

**گام دوم:** حالا نمودار تابع $f(x)$ را داریم که به صورت شکل روبه‌رو است:




**گام سوم:** از روی نمودار $y=f(x)$ حالا باید نمودار $g(x)=2f(\frac{2}{3}x)$ را به دست بیاوریم؛ پس باید طول نقاط نمودار $f(x)$ را در $\frac{3}{2}$ ضرب کنیم و با ضریب ۲ انبساط عمودی دهیم تا $g(x)$ به دست بیاید.




**گام چهارم:** با توجه به نمودار تابع g به‌دست‌آمده، حالا می‌توانیم مساحتی را که نمودار این تابع با محور xها می‌سازد، پیدا کنیم:

$$S=\frac{1}{2}\times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} =\frac{1}{2}\times(3-(-\frac{3}{2}))\times 4=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times 4=9$$

**نمودار تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{۴ - x}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده و سپس نسبت به مبدأ مختصات آن را قرینه می‌کنیم. نمودار به‌دست‌آمده خط $y = ۵$ را با کدام طول قطع می‌کند؟**

وارون تابع f

۱) $-۵$

۲) ۱

۳) ۳

۴) $-۲$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** قرینه نسبت به خط $y = x$، همان وارون تابع f می‌شود.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** قرینهٔ تابع f نسبت به خط $y = x$، همان وارون تابع f می‌شود؛ پس اول وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = ۲ - \sqrt{۴ - x} \Rightarrow y - ۲ = -\sqrt{۴ - x} \Rightarrow (۲ - y)^۲ = ۴ - x$$

$$\Rightarrow x = ۴ - (۲ - y)^۲ \xrightarrow{\text{جابه‌جایی x و y}} y = ۴ - (۲ - x)^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۴ - (۲ - x)^۲$$

پس با قرینه‌کردن تابع f نسبت به خط $y = x$، تابع $g(x) = ۴ - (۲ - x)^۲$ به دست می‌آید.

**گام دوم:** حالا باید تابع g را نسبت به مبدأ قرینه کنیم تا $y = -g(-x)$ حاصل شود:

$$y = -g(-x) = -(۴ - (۲ - (-x))^۲) = -۴ + (۲ + x)^۲$$

**گام سوم:** در این مرحله نمودار به‌دست‌آمده را باید با خط $y = ۵$ قطع بدهیم:

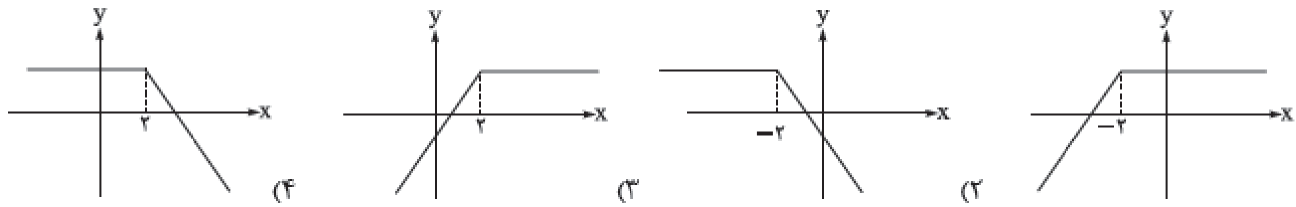
$$-۴ + (۲ + x)^۲ = ۵ \Rightarrow (۲ + x)^۲ = ۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x + ۲| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۲ + x = ۳ \\ \text{یا} \\ ۲ + x = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ \text{یا} \\ x = -۵ \end{cases}$$

**گام چهارم:** حالا باید ببینیم کدام‌یک از مقادیر x، قابل قبول است. به سراغ برد تابع f می‌رویم تا بتوانیم دامنهٔ تابع g را تعیین کنیم.

$$\sqrt{۴ - x} \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{۴ - x} \leq ۰ \Rightarrow ۲ - \sqrt{۴ - x} \leq ۲ \Rightarrow f(x) \leq ۲ \Rightarrow D_g = R_f = D_{f^{-۱}} = (-\infty, ۲]$$

حالا دامنهٔ $y = -g(-x)$ به صورت $-x \leq ۲$ و در نتیجه $x \geq -۲$ می‌شود، پس مقداری از x قابل قبول است که در این بازه قرار بگیرد؛ بنابراین $x = ۱$ قابل قبول هست و مقدار $x = -۵$ که جزء دامنه نیست، غیر قابل قبول است.

**نمودار $y=f(x)$ به کدام صورت باشد تا $g(x)=-f(۲-|x|)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ تابعی ثابت باشد؟**




**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** اول دقت کنید که با توجه به گزینه‌ها، خود تابع f دامنهٔ $\mathbb{R}$ دارد و با ضابطه‌ای که برای g تعریف شده، تابع g هم دامنهٔ $\mathbb{R}$ خواهد داشت. حالا باید به عبارت $|x|-۲$ که در تعریف تابع g آمده، دقت کنیم.

**گام اول:** بازهٔ تغییرات $|x|-۲$ را پیدا می‌کنیم:

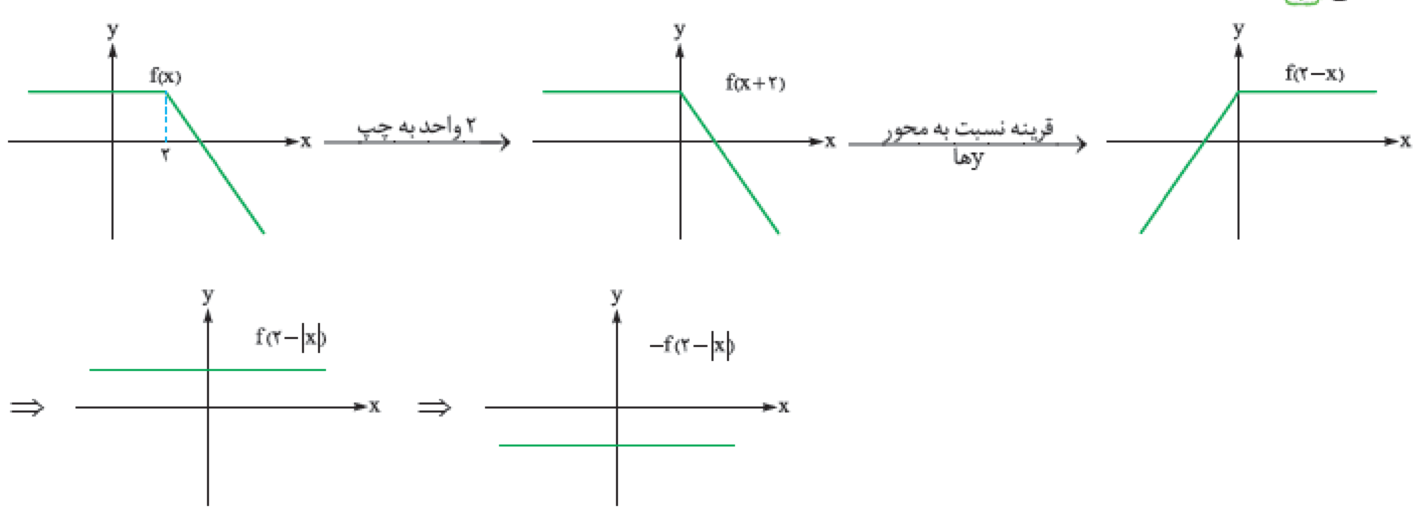
$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow |x|\geq ۰ \Rightarrow -|x|\leq ۰ \Rightarrow ۲-|x|\leq ۲$$

پس تا به این‌جا فهمیدیم که $۲ \leq |x|-۲$ است.

**گام دوم:** حالا دقت می‌کنیم که اگر در تابع $f(x)$، به ازای هر x که در عبارت $|x|-۲$ می‌گذاریم و حاصل آن کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد و تابع f به ازای آن ثابت باشد، تابع g هم ثابت می‌شود؛ یعنی این‌که خود تابع f باید به ازای $x \leq ۲$ تابعی ثابت باشد که از بین گزینه‌ها، ۴ می‌تواند تابع f را نمایش بدهد.

**نکته** در تبدیل x به $|x|$، قسمتی از تابع را که در xهای منفی است، حذف کرده و نمودار باقی‌مانده را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

بررسی ۴:



**تابع $f=\{(-۱,۵),(۲,۵),(۵,-۱),(۱,۲)\}$ مفروض است. به ازای چند مقدار a رابطهٔ $f(a)=f(۴-f(a))$ برقرار است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**پاسخ تشریحی** مقدار a عضوی از دامنهٔ تابع f است. به ازای مقادیر مختلف دامنهٔ تابع f، می‌بینیم که رابطهٔ داده‌شده، برقرار هست یا خیر؟!

**گام اول:** اول دامنهٔ تابع f را از روی زوج مرتب‌هایش تعیین می‌کنیم. مؤلفهٔ اول هر زوج مرتب، عضوی از دامنهٔ تابع است.

$$f=\{(-۱,۵),(۲,۵),(۵,-۱),(۱,۲)\} \Rightarrow D_f=\{-۱,۲,۵,۱\} \Rightarrow a\in D_f$$

**گام دوم:** حالا بررسی می‌کنیم که رابطهٔ $f(a)=f(۴-f(a))$ به ازای چه مقدار a برقرار است:

$$a=-۱:\begin{cases} f(-۱)=۵ \\ f(۴-f(-۱))=f(۴-۵)=f(-۱)=۵ \end{cases} \Rightarrow \checkmark \text{درست است.}$$

$$a=۲:\begin{cases} f(۲)=۵ \\ f(۴-f(۲))=f(۴-۵)=f(-۱)=۵ \end{cases} \Rightarrow \checkmark \text{درست است.}$$

$$a=۵:\begin{cases} f(۵)=-۱ \\ f(۴-f(۵))=f(۴-(-۱))=f(۵)=-۱ \end{cases} \Rightarrow \checkmark \text{درست است.}$$

$$a=۱:\begin{cases} f(۱)=۲ \\ f(۴-f(۱))=f(۴-۲)=f(۲)=۵ \end{cases} \Rightarrow \times \text{درست نیست.}$$

پس به ازای سه مقدار از a، رابطه‌ای که داده شده، برقرار است.

## تست و پاسخ ۱۰

**دامنهٔ تابع $y = \sqrt{(x-m)^۲(-x^۲ - x + ۶)}$ شامل هفت عدد صحیح متوالی است. حاصل‌جمع جواب‌های ممکن برای m کدام است؟**

۱) ۱    ۲) $-۱$    ۳) ۲    ۴) $-۲$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** محدودیت عبارت زیر رادیکال را در نظر بگیرید و تعیین علامت کنید.

**پاسخ تشریحی** با توجه به این‌که گفته شده دامنهٔ تابع y شامل ۷ عدد صحیح متوالی است، اول باید تکلیف محدودیت عبارت زیر رادیکال را مشخص کنیم.

**گام اول:** عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ پس داریم:

$$y = \sqrt{(x-m)^۲(-x^۲ - x + ۶)} \Rightarrow (x-m)^۲(-x^۲ - x + ۶) \geq ۰$$

**گام دوم:** می‌دانیم که عبارت $(x-m)^۲$، همواره نامنفی است؛ پس برای این‌که شرط بالا برقرار باشد، باید عبارت $-x^۲ - x + ۶$ هم نامنفی باشد؛ این عبارت را با پیداکردن ریشه‌هایش، تعیین علامت می‌کنیم:

$$-x^۲ - x + ۶ \geq ۰ \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{یافتن}} -(x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۲ \end{cases}$$

| x | | $-۳$ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x^۲ - x + ۶$ | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $-$ |

پس بازهٔ مورد نظر $-۳ \leq x \leq ۲$ است. مجموعه‌جواب گام اول با توجه به این‌که عبارت $(x-m)^۲$ در $x = m$ ریشه دارد، به صورت $[-۳, ۲] \cup \{m\}$ می‌شود.

**گام سوم:** بازهٔ $[-۳, ۲]$، ۶ تا عدد صحیح دارد، پس m باید یا $-۴$ یا ۳ باشد تا مجموعه جواب ممکن برای x که به صورت $[-۳, ۲] \cup \{m\}$ است، شامل ۷ عدد صحیح متوالی شود.

**گام چهارم:** پس مجموع مقادیر ممکن برای m، برابر با $-۴ + ۳ = -۱$ است.

## تست و پاسخ ۱۱

**نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر تابع $y = k + (f + ۶g)(x)$ همانی باشد، k کدام است؟**

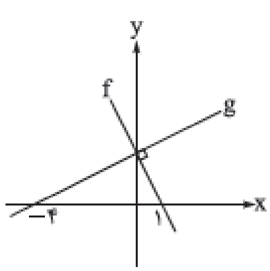
$y = x$

۱) $-۸$

۲) $-۱۰$

۳) $-۱۲$

۴) $-۱۴$

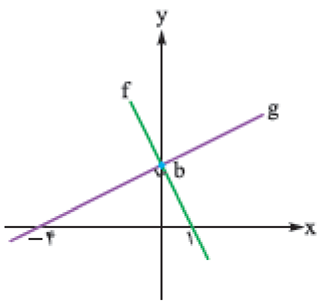



**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** دو خط $f$ و $g$ عمود برهم‌اند، پس شیب‌هایشان قرینه و معکوس یکدیگر است.

**پاسخ تشریحی** اول باید معادلهٔ خطوط $f$ و $g$ را پیدا کنیم و بعد از آن تابع $y$ را که همانی است، به دست بیاوریم. مقدار $k$ را در نهایت می‌توانیم پیدا کنیم.

**گام اول:** خطوط $f$ و $g$ عرض از مبدأ یکسانی دارند و عمود بر هم هستند، پس شیب‌هایشان قرینه و معکوس یکدیگر است. شیب خط $g$ را $m$ در نظر می‌گیریم.




$$\left.\begin{array}{l} \text{شیب خط } g : m=\dfrac{b}{۴} \\ \text{شیب خط } f : \dfrac{-۱}{m}=\dfrac{-b}{۱} \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{b}{۴}=\frac{۱}{b} \Rightarrow b^۲=۴ \xrightarrow{\text{از روی نمودار } b>۰ \text{ است.}} b=۲\,,\, m=\frac{۱}{۲}$$

**گام دوم:** حالا معادله‌های خطوط $f$ و $g$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{-۱}{m}x+b=-۲x+۲$$

$$g(x)=mx+b=\frac{۱}{۲}x+۲$$

**گام سوم:** حالا $f$ و $g$ را در تابع $y$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y=k+(f+۶g)(x)=k+(-۲x+۲)+۶(\frac{۱}{۲}x+۲)=k-۲x+۲+۳x+۱۲=x+k+۱۴$$

**گام چهارم:** تابع $y$ همانی است، یعنی $y=x$ می‌باشد، پس از گام سوم داریم:

$$y=x=x+k+۱۴ \Rightarrow k+۱۴=۰ \Rightarrow k=-۱۴$$

**دامنهٔ تابع $f(x)=[x]-[2x]$ برابر مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|2x-3|<2$ است. مجموع اعضای برد تابع f کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)**

۱) $-2$ ۲) $-3$ ۳) $-4$ ۴) $-6$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** اول مجموعه‌جواب نامعادلهٔ قدرمطلقی را محاسبه کنید تا دامنهٔ f مشخص شود. عبارت $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$ هم همواره برقرار است.

**درس‌نامه •• مجموعه‌جواب نامعادله‌های قدر مطلقی**

۱) نامعادلهٔ $|ax+b|<c$ $(c>0)$:

$$|ax+b|<c \xrightarrow{c>0} -c<ax+b<c \Rightarrow -c-b<ax<c-b$$

در ادامه با توجه به علامت ضریب a، بازه‌ی x می‌تواند به دو صورت $(a>0)\ \frac{-c-b}{a}<x<\frac{c-b}{a}$ یا $(a<0)\ \frac{c-b}{a}<x<\frac{-c-b}{a}$ باشد.

۲) نامعادلهٔ $|ax+b|>c$ $(c>0)$:

$$|ax+b|>c \Rightarrow \begin{cases} ax+b>c \\ \text{یا} \\ ax+b<-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax>c-b \\ ax<-b-c \end{cases}$$

ادامهٔ جواب، براساس علامت a تعیین می‌شود. در حالت کلی برای نامعادله‌های قدرمطلقی می‌توانیم روی x، حالت‌بندی کنیم و با توجه به بازه‌ای که x در آن قرار دارد، قدرمطلق را برداریم و به نامعادله‌های معمولی برسیم (بدون قدرمطلق).

**پاسخ تشریحی** راه اول: **گام اول:** مجموعه‌جواب نامعادلهٔ قدرمطلقی را به دست می‌آوریم:

$$|2x-3|<2 \Rightarrow -2<2x-3<2 \Rightarrow 1<2x<5 \Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$$

**گام دوم:** پس دامنهٔ تابع f، بازهٔ $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ به دست آمد. حالا مقادیر ممکن برای $[x]$ و $[2x]$ را به دست می‌آوریم تا برد تابع را پیدا کنیم. به این صورت انجام می‌دهیم که بازه‌های مختلف برای x فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}<x<1,\ 1<2x<2 \Rightarrow [x]=0\ ,\ [2x]=1 \Rightarrow y=[x]-[2x]=-1$$

$$1\le x<\frac{3}{2}, 2\le 2x<3 \Rightarrow [x]=1, [2x]=2 \Rightarrow y=-1$$

$$\frac{3}{2}\le x<2, 3\le 2x<4 \Rightarrow [x]=1, [2x]=3 \Rightarrow y=-2$$

$$2\le x<\frac{5}{2}, 4\le 2x<5 \Rightarrow [x]=2, [2x]=4 \Rightarrow y=-2$$

پس برد تابع $\{-2,-1\}$ است که مجموعشان، برابر با $-3$ می‌شود.

**نکته** این نکته را یادتان باشد که تقسیم بازه‌ها را با توجه به $2x$ انجام دادیم. باید $2x$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار بگیرد تا مقدار آن را بتوانیم تعیین کنیم؛ مثلاً اگر $[3x]$ داشتیم، بازه‌های x را به صورت $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}\le x<1$ و ... در نظر می‌گرفتیم.

راه دوم: **گام اول:** مجموعه‌جواب نامعادلهٔ قدرمطلقی را که در راه اول به دست آمد، داریم که به صورت $\frac{۱}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$ است.

**گام دوم:** تابع $f$ را ساده‌تر می‌کنیم. همواره رابطهٔ $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$ برقرار است؛ پس با جای‌گذاری آن در $f$ داریم:

$$f(x)=[x]-[۲x]=[x]-[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=-[x+\frac{۱}{۲}]$$

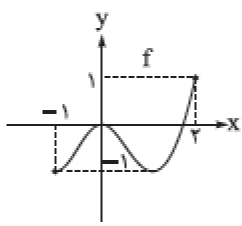
**گام سوم:** حالا از گام اول داریم:

$$\frac{۱}{۲}<x<\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۱<x+\frac{۱}{۲}<۳$$

مقادیر ممکن برای $[x+\frac{۱}{۲}]$، ۱ و ۲ می‌باشد، پس $f(x)$ مقادیر ۱− و ۲− را می‌تواند داشته باشد؛ بنابراین برد تابع $f$، $\{-۱,-۲\}$ است که مجموعشان برابر با ۳− است.

## تست و پاسخ ۱۳

**نمودار تابع $f$ به صورت زیر است. اگر $g(x)=۳-\sqrt{x+۲}$ باشد، دامنهٔ تابع $fog^{-۱}$ شامل چند عدد صحیح است؟**




۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

درس‌نامه **دامنهٔ توابع مرکب:** اگر فرض کنیم $y=f(g(x))$ است، در این صورت دامنهٔ تابع $y$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$D_y=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

**برد و دامنهٔ وارون تابع:** برای تابع وارون‌پذیر $f$، دامنه و برد تابع وارون $(f^{-۱})$ به ترتیب برابر با برد و دامنهٔ تابع اصلی $(f)$ می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق درس‌نامه، دامنهٔ تابع $fog^{-۱}$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$D_{fog^{-۱}}=\{x\in D_{g^{-۱}} \mid g^{-۱}(x)\in D_f\}$$

**گام دوم:** دامنهٔ تابع $g^{-۱}$، همان برد تابع $g$ است، پس باید برد تابع $g$ را پیدا کنیم.

$$g(x)=۳-\sqrt{x+۲} \Rightarrow \sqrt{x+۲}\geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x+۲}\leq ۰ \Rightarrow ۳-\sqrt{x+۲}\leq ۳$$
$$\Rightarrow g(x)\leq ۳ \Rightarrow R_g=D_{g^{-۱}}=(-\infty,۳]$$

**گام سوم:** تابع $g^{-۱}$ باید در محدودهٔ دامنهٔ تابع $f$ باشد؛ پس یعنی:

$$D_f=[-۱,۲] \Rightarrow -۱\leq g^{-۱}(x)\leq ۲$$

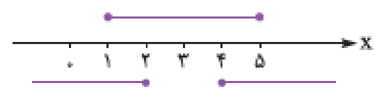
حالا باید تابع $g^{-۱}$ در محدودهٔ بالا قرار بگیرد، پس لازم است که ضابطهٔ $g^{-۱}(x)$ را به دست بیاریم:

$$y=۳-\sqrt{x+۲} \Rightarrow ۳-y=\sqrt{x+۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (۳-y)^۲=x+۲ \Rightarrow x=(۳-y)^۲-۲$$
$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=(۳-x)^۲-۲$$

**گام چهارم:** محدودهٔ تغییرات را اعمال می‌کنیم:

$$-۱\leq g^{-۱}(x)\leq ۲ \Rightarrow -۱\leq (۳-x)^۲-۲\leq ۲ \Rightarrow ۱\leq (۳-x)^۲\leq ۴ \Rightarrow ۱\leq |۳-x|\leq ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲\leq ۳-x\leq ۲ \Rightarrow ۱\leq x\leq ۵ \\ \text{و} \\ \begin{cases} ۳-x\geq ۱ \\ \text{یا} \\ ۳-x\leq -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq ۲ \\ \text{یا} \\ x\geq ۴ \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$



اگر بین جواب‌ها اشتراک بگیریم $x\in[۱,۲]\cup[۴,۵]$ می‌شود؛ پس در نتیجه داریم:

$$D_{fog^{-۱}}=\{x\in(-\infty,۳] \mid x\in[۱,۲]\cup[۴,۵]\}=[۱,۲]$$

که شامل ۲ عدد صحیح است.

**اگر $f(x)=g(4x-2)$ باشد و توابع f و g یک‌به‌یک باشند، خط $y=\frac{x+2}{2}$ نمودار تابع $y=(f^{-1}og)(x)$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ $(D_f=D_g=\mathbb{R})$**

۱) $-1$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-2$ ۴) $1$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** معادلهٔ $(f^{-1}og)(x)=\frac{x+2}{2}$ را حل کنید.

**پاسخ تشریحی** باید ببینیم دو نمودار $y=(f^{-1}og)(x)$ و $y=\frac{x+2}{2}$ در کجا همدیگر را قطع می‌کنند؛ پس معادله را تشکیل می‌دهیم و از عبارت $f(x)=g(4x-2)$ که داده شده و با فرض این‌که تابع یک به یک است در آن استفاده می‌کنیم.

**گام اول:** معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f^{-1}(g(x))=\frac{x+2}{2}\xrightarrow{f^{-1}(y)=x\ \Leftrightarrow\ y=f(x)}g(x)=f(\frac{x+2}{2})$$

**گام دوم:** حالا به جای $f(\frac{x+2}{2})$ عبارت $f(\frac{x+2}{2})=g(4(\frac{x+2}{2})-2)=g(2x+2)$ را قرار می‌دهیم:

$$g(x)=f(\frac{x+2}{2})=g(2x+2)\ \Rightarrow\ g(x)=g(2x+2)$$

چون $g(x)$ برابر با $g(2x+2)$ شده و این تابع یک‌به‌یک است، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که عبارت‌های داخلشان باید با هم برابر باشد:

$$x=2x+2\ \Rightarrow\ x=-2$$

یعنی دوتا نمودار در نقطهٔ $x=-2$ همدیگر را قطع می‌کنند.

**نمودار تابع $y = ۳x - a\,|x-۲|$ از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند. حدود a کدام است؟**

۱) $\circ \le a \le ۳$
۲) $a \le \circ$
۳) $-۳ \le a \le ۳$
۴) $a \ge -۳$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** این نوع سؤالات در کنکور خیلی مهم هستند. معمولاً به کمک ساده‌کردن عبارت و رسم نمودار می‌شود به جواب رسید.

**خودت حل کنی بهتره** ضابطهٔ y را با توجه به عبارت قدرمطلق، بازنویسی کنید.

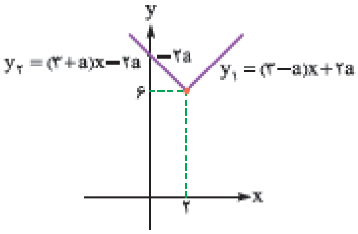
**پاسخ تشریحی** سعی می‌کنیم عبارت قدرمطلقی را از y حذف کنیم و y را به صورت دوضابطه‌ای بنویسیم و شرط عبورنکردن نمودار از ناحیهٔ چهارم را بررسی کنیم.

**گام اول:** $|x-۲|$ را تعیین تکلیف می‌کنیم:

$$|x-۲| = \begin{cases} x-۲ & ; x \ge ۲ \\ -x+۲ & ; x < ۲ \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} ۳x - a(x-۲) & ; x \ge ۲ \\ ۳x - a(-x+۲) & ; x < ۲ \end{cases} = \begin{cases} (۳-a)x + ۲a & ; x \ge ۲ \\ (۳+a)x - ۲a & ; x < ۲ \end{cases}$$

**گام دوم:** در هر قسمت از y، یک خط وجود دارد که بسته به این‌که شیبش و عرض مبدأش چه باشد، از ناحیهٔ چهارم عبور می‌کند یا خیر! دو حالت می‌توانیم داشته باشیم:

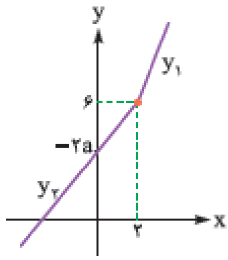
۱) حالت اول: شیب خط $y_۱ = (۳-a)x + ۲a$ نامنفی و شیب خط $y_۲ = (۳+a)x - ۲a$ نامثبت باشد:




شیب خطها: $\begin{cases} ۳ - a \geq ۰ \\ , \\ ۳ + a \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq ۳ \\ , \\ a \leq -۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a \leq -۳ \ (I) \xrightarrow{\text{اشتراک (I) و (II)}} a \leq -۳$

عرض از مبدأ خط $y_۲$: $-۲a \geq ۶ \Rightarrow a \leq -۳ \ (II)$

۲) حالت دوم: شیب هر دو خط نامنفی باشد. در این صورت باید عرض از مبدأ خط $y_۲ = (۳+a)x - ۲a$ نامنفی باشد تا تابع $y$ از ناحیهٔ چهارم عبور نکند:




شیب خطها: $\begin{cases} ۳ - a \geq ۰ \\ , \\ ۳ + a \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq ۳ \\ , \\ a \geq -۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۳ \leq a \leq ۳ \ (I)$

عرض از مبدأ خط $y_۲$: $۰ \leq -۲a \leq ۶ \Rightarrow -۳ \leq a \leq ۰ \ (II)$

$\xrightarrow{\text{اشتراک (I) و (II)}} -۳ \leq a \leq ۰$

**گام سوم:** از آن‌جایی که هر دو حالتی را که در گام دوم بررسی کردیم، می‌توانیم داشته باشیم، به ازای $a \leq ۰$، نمودار تابع $y$ از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

**نکته** دقت کنید که اگر شیب خط $y_۱$ منفی باشد، حتماً تابع $y$ از ناحیهٔ چهارم عبور می‌کند.

## تست و پاسخ ۱۶

**تابع وارون‌پذیر f مفروض است. با اعمال کدام تبدیل‌ها بر روی تابع $y = \frac{۱}{۳} f^{-۱}(۲ + x)$، وارون تابع $y = f(۲x)$ به دست می‌آید؟**

۱) انبساط افقی و انتقال عمودی

۲) انقباض افقی و انتقال عمودی

۳) انقباض عمودی و انتقال افقی

۴) انبساط عمودی و انتقال افقی

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** ابتدا وارون تابع $y = f(۲x)$ را به دست بیاورید.

**درس‌نامه** انتقال، انبساط و انقباض نمودارهای توابع

| | نمودار چه می‌شود؟ | نماد ریاضی | اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد. |
|---|---|---|---|
| انتقال | a واحد راست | $f(x-a)$ | به جای xها، $x-a$ می‌گذاریم. |
| | a واحد چپ | $f(x+a)$ | به جای xها، $x+a$ می‌گذاریم. |
| | b واحد بالا | $f(x)+b$ | bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم. |
| | b واحد پایین | $f(x)-b$ | bتا از ضابطه کم می‌کنیم. |
| انبساط و انقباض افقی | انبساط با ضریب ۲ | $f(\frac{x}{۲})$ | به جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم. |
| | انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$ | $f(۲x)$ | به جای xها، $۲x$ می‌گذاریم. |
| انبساط و انقباض عمودی | انبساط با ضریب ۲ | $۲f(x)$ | کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود. |
| | انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}f(x)$ | کل ضابطه ضربدر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** وارون تابع $y=f(۲x)$ را به دست می‌آوریم، به طوری که ابتدا x را تنها می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=f(۲x) \xrightarrow{f^{-۱}} f^{-۱}(y)=۲x \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(y) \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم.}]{\text{جای x و y را}} y=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(x)$$

**گام دوم:** حالا باید از تابع $y=\frac{۱}{۳}f^{-۱}(۲+x)$، تابع $y=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(x)$ را به دست بیاوریم:

$$y=\frac{۱}{۳}f^{-۱}(x+۲) \xrightarrow[\text{(انبساط عمودی)}]{\text{تابع را در } \frac{۳}{۲} \text{ ضرب می‌کنیم.}} y=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(x+۲)$$

$$\xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.(انتقال افقی)}]{\text{تابع را ۲ واحد به سمت راست}} y=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(x-۲+۲)=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(x)$$

بنابراین با تبدیل‌های انبساط عمودی و انتقال افقی، تبدیل خواسته‌شده در سؤال انجام می‌شود.

نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x}{x-۱}$ را نسبت به خطوط $x=۲$ و $y=۰$ قرینه می‌کنیم و سپس $k$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. اگر نمودار نهایی بر وارون خود منطبق باشد، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس‌نامه** قرینه‌یابی

| نمودار چه می‌شود؟ | نماد ریاضی | اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد. |
|---|---|---|
| قرینه نسبت به محور $x$ها | $-f(x)$ | به جای $y$ها، $-y$ می‌گذاریم. |
| قرینه نسبت به محور $y$ها | $f(-x)$ | به جای $x$ها، $-x$ می‌گذاریم. |
| قرینه نسبت به مبدأ | $-f(-x)$ | هر دو کار بالا با هم! |
| قرینه نسبت به خط $x=k$ | $f(۲k-x)$ | به جای $x$ها، $۲k-x$ می‌گذاریم. |
| قرینه نسبت به خط $y=k$ | $۲k-f(x)$ | به جای $y$ها، $۲k-y$ می‌گذاریم. |

**نکته** در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر رابطهٔ $a+d=۰$ را داشته باشیم، آن‌گاه $f^{-۱}(x)=f(x)$. (خودتان اثبات کنید.)

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع $f$ را نسبت به خطوط گفته‌شده، قرینه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x}{x-۱}\xrightarrow[x=۲]{\text{قرینه نسبت به خط}} g(x)=f(۲\times۲-x)=f(۴-x)=\frac{۲(۴-x)}{۴-x-۱}=\frac{۸-۲x}{۳-x}$$

$$\xrightarrow[y=۰]{\text{قرینه نسبت به خط}} h(x)=۲\times۰-g(x)=-g(x)=\frac{۲x-۸}{۳-x}$$

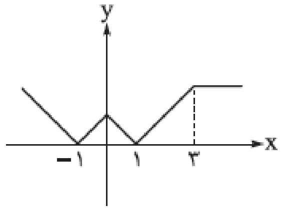
**گام دوم:** حالا نمودار $h(x)$ به‌دست‌آمده را $k$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

$$y=h(x)+k=\frac{۲x-۸}{۳-x}+k=\frac{۲x-۸+۳k-kx}{۳-x}=\frac{(۲-k)x+۳k-۸}{-x+۳}\quad(*)$$

**گام سوم:** وارون تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

برای آن‌که این دو تابع بر هم منطبق باشند، طبق درس‌نامه باید $a+d=۰$ باشد؛ بنابراین در رابطهٔ $(*)$ داریم: $۲-k+۳=۰ \Rightarrow k=۵$

نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر $y = f(|x| + k)$ تابعی ثابت باشد. حدود $k$ کدام است؟




۱) $k \geq ۳$

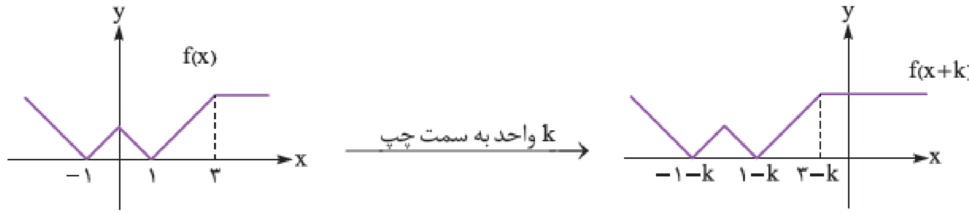
۲) $۰ \leq k < ۳$

۳) $-۳ \leq k \leq ۰$

۴) $k \leq -۳$

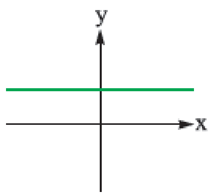
**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** از روی تابع $f$ داده‌شده، تابع $y = f(|x| + k)$ را به دست می‌آوریم:




نمودار (۱)

نمودار (۲)




حالا قسمتی از نمودار که مربوط به $x < ۰$ است را حذف می‌کنیم و قسمت باقی‌مانده را نیز نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع $f(|x| + k)$ به دست بیاید:

**گام دوم:** نمودار بالا یک تابع ثابت را نشان می‌دهد. برای آن‌که این نمودار به دست بیاید، باید در نمودار دوم، $۳ - k \leq ۰$ باشد، پس $k \geq ۳$ است.

**توابع $f(x)=[x-۳]+[-x]$ و $g(x)=a+|x|$ مفروض است. اگر برد توابع fog و gof یکسان باشد، مقدار $[\frac{-a}{۲}]$ کدام است؟**

۱) $-۴$ ۲) $-۳$

۳) $۳$ ۴) $۴$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** توابع fog و gof را به دست بیاورید.

**درس‌نامه**

همواره $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & , x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & , x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، زیرا: $[-x]=\begin{cases}-[x] & , \quad x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & , \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=[g(x)-۳]+[-g(x)]=[g(x)]+[-g(x)]-۳$$

از طرفی می‌دانیم که همواره $[g(x)]+[-g(x)]$ برابر با صفر یا ۱− است؛ پس: $f(g(x))=-۳$ یا $-۴$

**گام دوم:** حالا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=a+|[x-۳]+[-x]|=a+|[x]+[-x]-۳|=\begin{cases}a+|۰-۳|=a+۳\\ \text{یا}\\ a+|-۱-۳|=a+۴\end{cases}$$

**گام سوم:** برد توابع fog و gof با هم برابر است؛ پس:

$$\{-۳,-۴\}=\{a+۳,a+۴\}\Rightarrow ۱)\begin{cases}a+۳=-۳\\ \text{و}\\ a+۴=-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۶\\ \text{و}\\ a=-۸\end{cases}\text{غ‌ق‌ق}$$

$$۲)\begin{cases}a+۳=-۴\\ \text{و}\\ a+۴=-۳\end{cases}\Rightarrow a=-۷$$

**گام چهارم:** مقدار $[\frac{-a}{۲}]$ برابر با $[\frac{-(-۷)}{۲}]=[۳/۵]=۳$ می‌شود.

فرض کنید $f=\{(۲,۱),(-۱,۲),(۱,۴)\}$ باشد. اگر $fo\frac{۱}{f}=\frac{۱}{g}of^{-۱}$ باشد، مقدار $g(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $-۱$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** سؤال‌های تابع وارون و تابع مرکب در کنکور سال‌های اخیر، با یکدیگر ترکیب شده‌اند.

نکتهٔ مهم این‌جاست که $f(b)=a \leftrightarrow f^{-۱}(a)=b$.

**خودت حل کنی بهتره** در رابطهٔ داده‌شده، از $f^{-۱}(x)=-۱$، مقدار x را به دست آورید و در رابطه قرار دهید.

**پاسخ تشریحی**

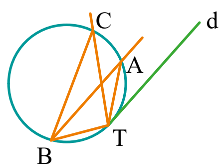
**گام اول**: از آن‌جایی که مقدار $g(-۱)$ خواسته شده، باید در معادلهٔ $f(\frac{۱}{f(x)})=\frac{۱}{g(f^{-۱}(x))}$، مقدار $f^{-۱}(x)=-۱$ را قرار دهیم؛ بنابراین:

$$f^{-۱}(x)=-۱ \xrightarrow{f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-۱}(y)} x=f(-۱)=۲$$

**گام دوم**: در رابطهٔ داده‌شده، $x=۲$ را قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{۱}{f(۲)})=\frac{۱}{g(f^{-۱}(۲))} \Rightarrow f(\frac{۱}{۱})=\frac{۱}{g(-۱)} \Rightarrow ۴=\frac{۱}{g(-۱)} \Rightarrow g(-۱)=\frac{۱}{۴}$$

**۲۱** **در شکل مقابل، خط d در نقطه T بر دایره مماس و با وتر AB موازی است. اگر AT با CB موازی و CT بر TB عمود باشد، زاویه‌ای که خط d با پاره‌خط TA می‌سازد، کدام است؟**



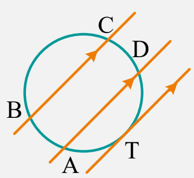

۱) $15°$
۲) $30°$
۳) $20°$
۴) $40°$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**نکته۱:**

کمان‌های بین وترهای موازی در دایره هم‌اندازه‌اند. مثلاً در شکل مقابل: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

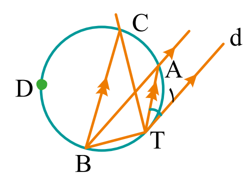
کمان‌های بین وتر و خط مماس موازی با آن در دایره هم‌اندازه‌اند. مثلاً در شکل مقابل: $\overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{DT}$




**نکته۲:**

اندازهٔ زاویه ظلی، نصف کمان روبه‌رو به آن است.

**پاسخ تشریحی:**

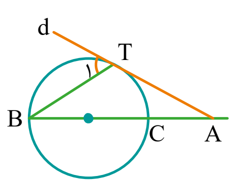



$$\left.\begin{array}{l} d \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TB} \\ AT \parallel BC \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{TB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{TB} = \overset{\frown}{AT}$$

با توجه به اینکه زاویه محاطی $C\hat{T}B$ قائم است، پس CB قطر است و کمان $\overset{\frown}{CDB}$ برابر با $180°$، پس هر کدام از کمان‌های $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{TB}$ و $\overset{\frown}{AT}$ برابر با $60°$ است، بنابراین زاویه ظلی $\hat{T}_1$ که نصف $\overset{\frown}{TA}$ است $30°$ می‌باشد.



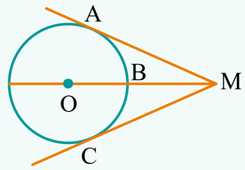
**۲۲** **در شکل مقابل، BC قطر و d خط مماس بر دایره در نقطه T است. اگر $\hat{T}_1 = 60°$ باشد، $\hat{A}$ کدام است؟**




۱) $30°$
۲) $45°$
۳) $25°$
۴) $15°$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**زاویه‌ای که اضلاعش مماس بر دایره است چطور به دست می‌آید؟**



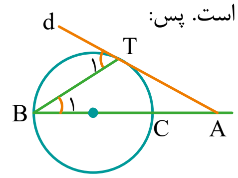

اگر مانند شکل مقابل، MA و MC بر دایره‌ای مماس باشند و امتداد MB از مرکز دایره بگذرد، داریم:

$$A\hat{M}B = C\hat{M}B = ۹۰^\circ - \overset{\frown}{AB} = ۹۰^\circ - \overset{\frown}{BC}$$

در نتیجه: $A\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{ABC}$

**روش اول:**

زاویه $\hat{T}_۱$ ظلی و نصف $\overset{\frown}{TB}$ است. زاویه $\hat{B}_۱$ محاطی و نصف $\overset{\frown}{TC}$ است. پس:



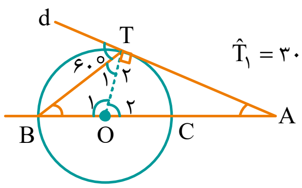

$$\overset{\frown}{TB} + \overset{\frown}{TC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{T}_۱ + \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{T}_۱ = ۶۰^\circ} \hat{B}_۱ = ۳۰^\circ$$

از طرفی، چون $\hat{T}_۱$ زاویه خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ATB}$ است، داریم:

$$\hat{T}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{A} \xrightarrow[\hat{B}_۱ = ۳۰^\circ]{\hat{T}_۱ = ۶۰^\circ} \hat{A} = ۳۰^\circ$$

**روش دوم:**

از مرکز دایره به T وصل می‌کنیم. خط مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است، پس: $\hat{T}_۱ = ۳۰^\circ \ , \ \hat{T}_۲ = ۹۰^\circ$

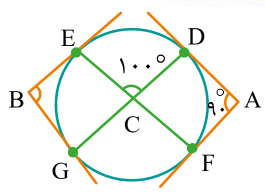



از طرفی، مثلث $\overset{\triangle}{BTO}$ متساوی‌الساقین است. ( BO = OT = شعاع دایره)

$$\hat{B} = \hat{T}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ$$



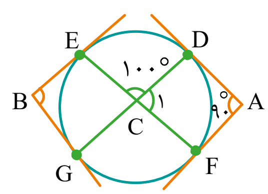
**۲۳** در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. زاویه $\hat{B}$ کدام است؟




۱) $۱۱۰^\circ$
۲) $۸۰^\circ$
۳) $۷۰^\circ$
۴) $۹۰^\circ$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**روش اول:**




با توجه به درسنامه سوال قبل:

$$\overset{\frown}{DF} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} \xrightarrow{A = ۹۰^\circ} \overset{\frown}{DF} = ۹۰^\circ$$

از طرفی:

$$D\hat{C}E = ۱۰۰^\circ \Rightarrow D\hat{C}F = ۸۰^\circ$$

پس داریم:

$$D\hat{C}F = \frac{\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{EG}}{۲} \xrightarrow[D\hat{C}F = ۸۰^\circ]{\overset{\frown}{DF} = ۹۰^\circ} \overset{\frown}{EG} = ۷۰^\circ$$

اما می‌دانیم $\hat{B} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{EG}$، پس $\hat{B} = ۱۱۰^\circ$ است.

**روش دوم:**

در این گونه اشکال می‌توان ثابت کرد: $\hat{C} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{۲}$، بنابراین:

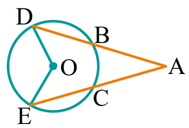
$$\hat{C} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{۲} \Rightarrow \frac{۹۰^\circ + \hat{B}}{۲} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۱۰^\circ$$

اثبات:

$$\hat{C} = ۱۸۰^\circ - \underbrace{\frac{\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{EG}}{۲}}_{\hat{C}_۱} \Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \frac{(۱۸۰^\circ - \hat{A}) + (۱۸۰^\circ - \hat{B})}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ - (\hat{A} + \hat{B})}{۲} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{۲}$$

**۲۴** در شکل مقابل، $AB = BD = AC = CE = R$ که $R$ شعاع دایره است. زاویه $D\hat{O}E$ کدام است؟




۱) $180°$

۲) $150°$

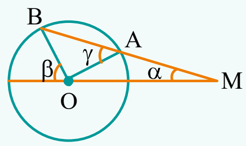
۳) $135°$

۴) $120°$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

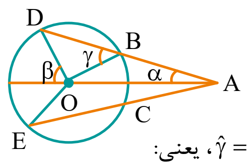
**بد نیست این روابط رو هم بلد باشید!**

اگر در شکل مقابل، $MA$ با شعاع دایره برابر باشد و $\hat{M} = \alpha$، آن‌گاه $\hat{\gamma} = 2\alpha$ و $\hat{\beta} = 3\alpha$ است.




**روش اول:**

با توجه به درسنامه و $AB = R$ داریم: $\hat{\gamma} = 2\alpha$ و $\hat{\beta} = 3\alpha$




از طرفی، در مثلث $\overset{\triangle}{OBD}$ با توجه به $DB = R$ سه ضلع، مساوی و مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس: $\hat{\gamma} = 60°$، یعنی:

$$\hat{\gamma} = 60° = 2\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = 30° \Rightarrow \hat{\beta} = 90°$$

مشابه همین محاسبات برای نصف پایین شکل هم برقرار است، پس داریم:

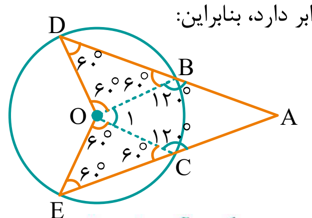
$$D\hat{O}E = 2\hat{\beta} = 2 \times 90° = 180°$$

**روش دوم:**

از $O$ به $B$ و $C$ وصل می‌کنیم. طبق گفته سوال $BD$ و $EC$ برابر شعاع دایره می‌باشند. بنابراین هر کدام از مثلث‌های $\overset{\triangle}{OBD}$ و $\overset{\triangle}{OCE}$ متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

از طرفی، چهار ضلعی $OBAC$ لوزی می‌باشد، زیرا ۴ ضلع برابر دارد، بنابراین:

$$\hat{O}_1 + 120° + \hat{A} + 120° = 360° \xrightarrow{\hat{O}_1 = \hat{A}} \hat{O}_1 = 60°$$

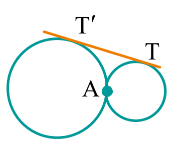



پس:

$$D\hat{O}E = 360° - 3 \times 60° = 180°$$

گروه آموزشی ماز

**۲۵** در شکل مقابل، دو دایره در نقطه $A$ مماس هستند و شعاع دایره بزرگ‌تر ۴ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است و $T'T$ مماس مشترک آن‌ها است. زاویه $TAT'$ کدام است؟




۱) $60°$

۲) $75°$

۳) $90°$

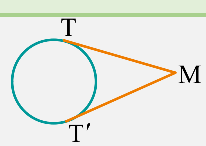
۴) $120°$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

**نکته:**

اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر آن رسم کنیم، طول ۲ خط مماس برابر است.

$$MT' = MT$$

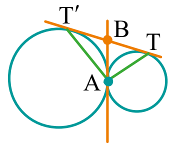



یادآوری: میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است و برعکس. یعنی اگر در یک مثلث، میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع بود آن مثلث قائم‌الزاویه و آن ضلع وتر است.

تمرین: نکته و یادآوری را ثابت کنید.

**پاسخ تشریحی:**

اگر مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم کنیم تا در $B$، $TT'$ را قطع کند $BT$ و $AB$ دو مماس بر دایره کوچک‌تر می‌شوند و با هم برابرند. با همین استدلال $BT' = AB$، پس $AB = BT = BT'$ یعنی در مثلث $\overset{\triangle}{ATT'}$ پاره‌خط $AB$ میانه و البته نصف ضلع $TT'$ است.




پس مثلث $\overset{\triangle}{ATT'}$ قائم‌الزاویه در رأس A است.

توجه کنید که شعاع دایره‌ها هیچ تاثیری در جواب ندارد.

گروه آموزشی ماز

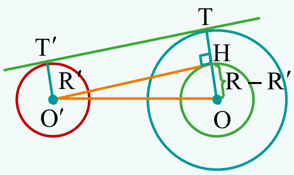
**۲۶** **طول مماس مشترک دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱ برابر با ۴ می‌باشد. به مرکز دایره بزرگ‌تر و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم. از مرکز دایره‌ای که شعاع آن ۱ است بر دایره به شعاع ۳ مماس رسم می‌کنیم. طول این مماس کدام است؟**

۱) ۴    ۲) ۵    ۳) ۶    ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱    (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

**بریم یک شکل با روابط پرکاربرد ببینیم**

در شکل مقابل، دایره قرمز به مرکز $O'$ و شعاع $R'$ و دیگری به مرکز O و شعاع R است و $TT'$ مماس مشترک آن‌ها است. با رسم دایرهٔ سبز رنگ به مرکز O و شعاع $R-R'$ می‌توان گفت:




۱) $TT'O'H$ مستطیل است.

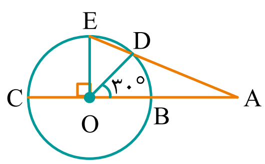
۲) $O'H$ مماس بر دایره سبز به مرکز O و شعاع $R-R'$ است. بنابراین طول مماس رسم شده از $O'$ بر دایره سبز با $T'T$ برابر است.

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به درسنامه طول مماس بر دایره به مرکز O و به شعاع ۳ با طول مماس مشترک دایره‌های به شعاع ۴ و ۱ برابر است یعنی جواب ۴ است.

گروه آموزشی ماز

**۲۷** **در شکل مقابل، $E\hat{O}C = ۲D\hat{O}B = ۹۰^\circ$ ، O مرکز دایره و شعاع دایره R است. $AB \times AC$ کدام است؟**




۱) $R^۲$

۲) $۲R^۲$

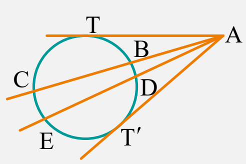
۳) $۳R^۲$

۴) $۴R^۲$

پاسخ: گزینه ۲    (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**نکته۱:**

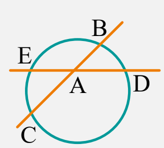
در شکل مقابل:




۱) $AT^۲ = AB \times AC = AD \times AE$

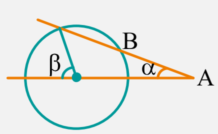
۲) $AT = AT'$

**نکته۲:**




$AB \times AC = AD \times AE$

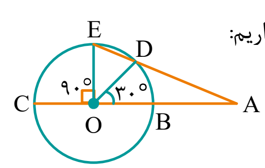
یادآوری:




$AB = r$ (شعاع دایره) $\Leftrightarrow \beta = ۳\alpha$

**پاسخ تشریحی:**

چون وتر CB از مرکز می‌گذرد، قطر است وداریم:




$$CB \text{ قطر} \Rightarrow C\hat{O}E + E\hat{O}D + D\hat{O}B = ۱۸۰^\circ \xrightarrow[C\hat{O}E=۹۰^\circ]{D\hat{O}B=۳۰^\circ} E\hat{O}D = ۶۰^\circ$$

با توجه به اینکه در مثلث $\overset{\triangle}{OED}$ دو ضلع با هم برابر (برابر شعاع دایره هستند) و زاویه بین آن‌ها $۶۰^\circ$ است، این مثلث متساوی‌الاضلاع است و $\widehat{EDO}=۶۰^\circ$.

از طرف دیگر: $\overset{\triangle}{ODA}$ زاویهٔ خارجی $\widehat{EDO}=\widehat{DOB}+\widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DAB}=۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{DAB}=\widehat{DOB} \Rightarrow$

$\overset{\triangle}{ODA}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow OD = DA =$ [illegible] $= R$

از نکتهٔ ۱ گفته شده داریم: $AB \times AC = \underbrace{AD}_{R} \times \underbrace{AE}_{۲R} = R \times (۲R) = ۲R^۲$

که برابر است با: $۲R^۲$

گروه آموزشی ماز

**۲۸** **اضلاع یک مثلث به طول ۵ ، ۵ و ۶ می‌باشد. شعاع دایره محاطی داخلی آن کدام است؟**

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**شعاع دایرهٔ محاطی داخلی:**

اگر در یک n ضلعی محیطی، مساحت S و محیط ۲P باشد، شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر است با: $r=\frac{S}{P}$

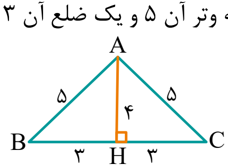
**نکته:**

مساحت مثلثی که اندازهٔ ۳ ضلع آن معلوم است را با روش هرون نیز می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

**پاسخ تشریحی:**

با توجه به اینکه ارتفاع وارد بر قاعده در یک مثلث متساوی‌الساقین، میانه هم است، پس مثلث $\overset{\triangle}{AHC}$ قائم‌الزاویه است که وتر آن ۵ و یک ضلع آن ۳ است. پس $AH=۴$ و $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۶\times ۴}{۲}=۱۲$ و $P=۸$، پس طبق درسنامه $r=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$ است.



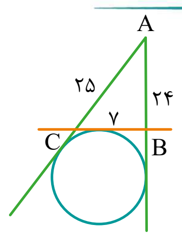

**سوالات منتخب:**

شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی به اضلاع ۳ ، ۴ و ۵ کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

گروه آموزشی ماز

**۲۹** **در شکل مقابل، از نقطه A دو مماس بر دایره رسم شده است و BC نیز بر دایره مماس است. شعاع این دایره کدام است؟**

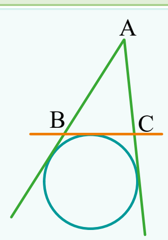



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**شعاع دایرهٔ محاطی خارجی:**

اگر S و ۲P به ترتیب مساحت و محیط مثلث ABC باشند، شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر BC برابر است با: $r=\frac{S}{P-BC}$

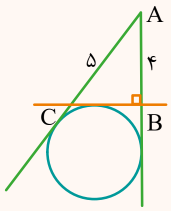


**پاسخ تشریحی:**

۷ ، ۲۴ و ۲۵ در رابطه فیثاغورس صدق می‌کند، یعنی $A\hat{B}C$ قائم‌الزاویه است، پس $S_{A\hat{B}C} = \frac{۷\times ۲۴}{۲} = ۸۴$ و $P = ۲۸$.

طبق درسنامه $r = \frac{S}{P-BC}$، پس: $r = \frac{۸۴}{۲۱} = ۴$ است.

**سوالات منتخب:**

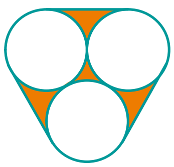



در شکل زیر، از نقطه A دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $AB \perp BC$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲ ✓
۴) ۲/۵



**۳۰** **شکل مقابل، شامل ۳ دایره دو به دو مماس و مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها است. اگر شعاع دایره‌ها یک باشد، مساحت ناحیه هاشور خورده کدام است؟**

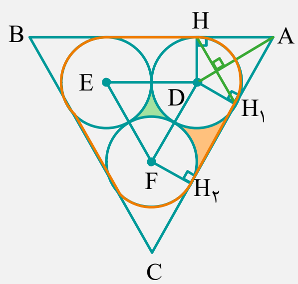


۱) $۳+\sqrt{۳}-\pi$
۲) $۶+\sqrt{۳}-۲\pi$
۳) $۶+\sqrt{۳}-\pi$
۴) $۳+\sqrt{۳}-۲\pi$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**نکته:**

در شکل مقابل، اگر شعاع همه دایره‌ها r باشد:




$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = D\hat{E}F = E\hat{F}D = F\hat{D}E = ۶۰^\circ$

۱) $B\hat{A}C$ و $E\hat{D}F$ متساوی‌الاضلاع هستند. پس:

۲) طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $D\hat{E}F$ برابر با $۲r$ و مساحت آن $\sqrt{۳}r^۲$ و مساحت ناحیه هاشور خورده سبز $r^۲(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$ است.

۳) طول تسمه نارنجی برابر است با: $۶r+۲\pi r$.

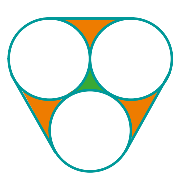
۴) مساحت ناحیه هاشور خورده نارنجی برابر است با: $(۲-\frac{\pi}{۲})r^۲$.

اگر به جای ۳ دایره مماس، دو دایره مماس داشته باشیم، همچنان این ناحیه و مساحت را داریم.

۵) زاویه $H\hat{D}H_۱ = ۱۲۰^\circ$، $AD = ۲r$، $AH_۱ = \sqrt{۳}r$، $HH_۱ = \sqrt{۳}r$ است و $DA \perp HH_۱$ است.

تمرین: ۵ قسمت نکته فوق را ثابت کنید.

**پاسخ تشریحی:**



طبق نکته ۴: $S = ۳(۲-\frac{\pi}{۲})$

طبق نکته ۲: $S = \sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}$

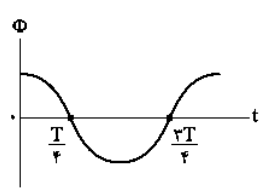
$S = ۶+\sqrt{۳}-۲\pi$

**۳۱** (۲) عبارت‌های «الف»، «ب» و «د» درست هستند.

**بررسی عبارت نادرست:**

ج) برای تغییرات ولتاژ از **مبدل** استفاده می‌شود.

**۳۲** (۱) آهنگ تغییر شار مغناطیسی همان نیروی محرکهٔ القایی متوسط است، در جاهایی که نیروی محرکهٔ القایی متوسط $(\varepsilon)$ بیشینه است، شار مغناطیسی عبوری برابر صفر خواهد شد.



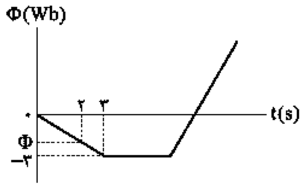

در مولد جریان متناوب در مدت‌زمان یک دوره، تغییرات شار مغناطیسی برابر صفر است، بنابراین جریان الکتریکی متوسط نیز در یک دوره صفر است.

**۳۳** (۲) با استفاده از رابطهٔ ضریب القاوری داریم:

$$L=\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}=\frac{12\times10^{-7}\times(1000)^2\times20\times10^{-4}}{80\times10^{-2}}$$

$$\Rightarrow L=\frac{12\times10^{-7}\times10^{6}\times20\times10^{-4}}{80\times10^{-2}}=3\times10^{-3}\,H=3\,mH$$

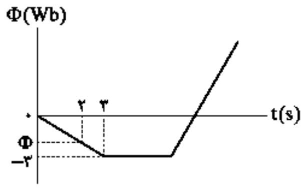
**۳۴** (۳) با استفاده از تشابه دو مثلث $ABC$ و $A'B'C$ لحظهٔ $t$ را به دست می‌آوریم:




$$\frac{6}{9-t}=\frac{3}{t-6}\Rightarrow 2t-12=9-t$$

$$\Rightarrow 3t=21\Rightarrow t=7s$$

در لحظهٔ $t=2s$ بزرگی شار مغناطیسی عبوری از حلقه برابر است با:




$$\frac{\Phi}{2}=\frac{3}{3}\Rightarrow \Phi=-2\,Wb$$

و شار مغناطیسی عبوری از حلقه در لحظهٔ $t=7s$ برابر صفر است.

حال به کمک قانون فاراده داریم:

$$|\bar{\varepsilon}|=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|\Rightarrow|\bar{\varepsilon}|=\left|-1\times\frac{0-(-2)}{5}\right|$$

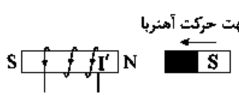
$$\Rightarrow|\bar{\varepsilon}|=0.4\,V\Rightarrow|\bar{\varepsilon}|=400\,mV$$

**۳۵** (۳) جهت جریان القایی را می‌توانیم فقط با استفاده از قانون لنز به دست بیاوریم، به طوری‌که جهت جریان القایی باید به گونه‌ای باشد که با عامل تغییر شار مخالفت کند.

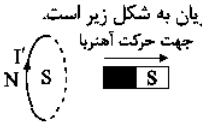
**بررسی گزینه‌ها:**

۱) جریان در سیم در حال افزایش است، پس جریان القایی درون حلقه باید میدان مغناطیسی داخل حلقه ایجاد کند تا با افزایش میدان مغناطیسی حاصل از سیم در مرکز حلقه مخالفت کند. با توجه به قاعدهٔ دست راست، جهت میدان حاصل از سیم درون حلقه درون‌سو است، پس جهت میدان القایی در حلقه برون‌سو و جهت جریان پادساعتگرد است.

۲) با توجه به جهت حرکت آهنربا، جریان القایی در سیملوله باید میدان مغناطیسی درون سیملوله ایجاد کند تا از نزدیک شدن آهنربا جلوگیری کند، پس جریان القایی در آهنربا به شکل زیر است.




۳) با توجه به جهت حرکت آهنربا، جریان القایی باید میدان مغناطیسی درون حلقه ایجاد کند تا از دور شدن آهنربا جلوگیری کند، پس جریان به شکل زیر است.




۴) حلقه در حال دور شدن از سیم حامل جریان است، پس میدان حاصل از سیم در مکان حلقه در حال کاهش است، پس باید جریان القایی در حلقه میدان مغناطیسی ایجاد کند که هم‌جهت با میدان مغناطیسی حاصل از سیم در مکان حلقه باشد، با توجه به این‌که جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم در مرکز حلقه برون‌سو است، پس میدان حاصل از جریان القایی نیز در مرکز حلقه باید برون‌سو باشد، در نتیجه جهت جریان القایی در حلقه پادساعتگرد است.

**۳۶** ۴) تندی حرکت قاب برابر $2.5\frac{cm}{s}$ است، پس از لحظهٔ ورود قاب به میدان تا لحظه‌ای که قاب به طور کامل در میدان قرار می‌گیرد، ۸ ثانیه طول می‌کشد.

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 20 = 2.5\times\Delta t \Rightarrow \Delta t = 8s$$

با استفاده از قانون فاراده داریم:

$$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta BA\cos\theta}{\Delta t}|$$

$$\xrightarrow[A=200cm^2=2\times10^{-2}m^2]{B_1=0\ ,\ B_2=5\times10^{-2}T} |\bar{\varepsilon}| = |-1\times\frac{5\times10^{-2}\times2\times10^{-2}\times\cos0^\circ}{8}|$$

$$\Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = 1.25\times10^{-4}V$$

با ورود قاب به میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی عبوری از قاب افزایش می‌یابد، بنابراین طبق قانون لنز، جریانی در قاب القا می‌شود تا با افزایش شار مخالفت کند، بنابراین میدان القایی در قاب باید برون‌سو باشد، پس طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در قاب، پادساعتگرد است.

**۳۷** ۳) انرژی ذخیره‌شده در سیملوله از رابطهٔ $U=\frac{1}{2}LI^2$ به دست می‌آید، هم‌چنین ضریب القاوری آن نیز از رابطهٔ $L=\frac{\mu_0 N^2A}{\ell}$ قابل محاسبه است، بنابراین:

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{L_A}{L_B}\times(\frac{I_A}{I_B})^2$$

$$\Rightarrow \frac{U_A}{U_B} = (\frac{N_A}{N_B})^2\times(\frac{A_A}{A_B})\times(\frac{\ell_B}{\ell_A})\times(\frac{I_A}{I_B})^2$$

$$\xrightarrow[\ell_A=2\ell_B\ ,\ I_A=\frac{1}{2}I_B]{A_A=A_B\ ,\ N_A=N_B} \frac{U_A}{U_B} = 1\times1\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8}$$

**۳۸** ۲) با استفاده از قانون القای فاراده داریم:

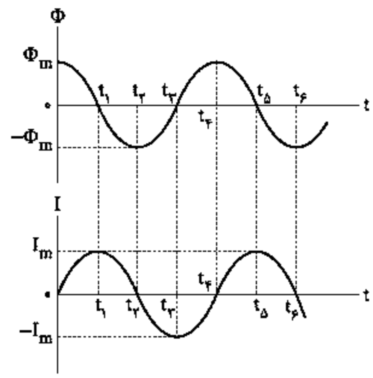
$$\begin{cases}\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1} = -a^2\frac{\Delta B}{\Delta t}\\ \bar{\varepsilon}_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -4a^2\frac{\Delta B}{\Delta t}\end{cases} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 = -3a^2\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow 90\times10^{-3} = -3a^2\times\frac{0.2-0.8}{50\times10^{-3}}$$

$$\Rightarrow a^2 = 25\times10^{-4} \Rightarrow a = 5\times10^{-2}m = 5cm$$

**۳۹** ۲) به‌ازای هر بار گذر نمودار $\Phi-t$ از صفر (محور tها)، جریان در نمودار $I-t$ به $|I_m|$ می‌رسد، اما صورت سؤال $I_m$ را می‌خواهد. با گذر نمودار $\Phi-t$ از صفر به گونه‌ای که از بالای نمودار، محور t را قطع کند، جریان به $I_m$ می‌رسد، اما اگر از پایین نمودار، محور t را به سمت بالا قطع کند، جریان به $-I_m$ می‌رسد.

می‌توان نمودار $I-t$ را برحسب نمودار $\Phi-t$ داده‌شده، رسم کرد. به‌ازای هر بار گذر نمودار $\Phi-t$ از صفر، نمودار $I-t$ به $I_m$ می‌رسد و به‌ازای هر بار رسیدن نمودار $\Phi-t$ به ماکزیمم، نمودار $I-t$ به صفر می‌رسد.

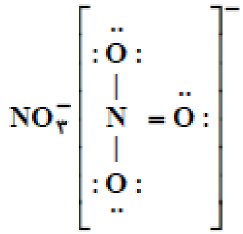



**۴۰** ۲) در هنگام وصل کلید، جریان از صفر رو به افزایش است، بنابراین نیروی محرکهٔ خود ـ القاوری در خلاف جهت نیروی محرکهٔ مولد ایجاد می‌شود، بنابراین هیچ جریانی از القاگر عبور نمی‌کند و تقریباً شبیه به یک مقاومت بسیار بزرگ عمل می‌کند، بنابراین تمام جریان از شاخهٔ بالایی، یعنی آمپرسنج عبور می‌کند.

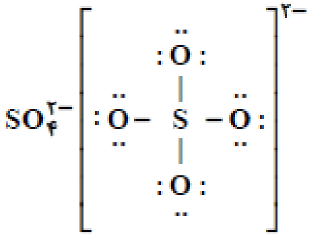
بعد از مدتی که نیروی محرکهٔ خود ـ القاوری کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد، به دلیل این‌که القاگر، بدون مقاومت الکتریکی است، بنابراین دوسر مقاومت و آمپرسنج اتصال کوتاه شده و تمام جریان از شاخهٔ پایینی عبور می‌کند، پس آمپرسنج صفر را نشان می‌دهد.

**۴۱** پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

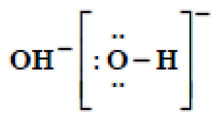
مس می‌تواند به‌صورت یون‌های $Cu^{+}$ و $Cu^{2+}$ در ترکیب حضور داشته باشد. بنابراین بار آنیون X، ۱− یا ۲− است. پس فسفات ($PO_4^{3-}$) نمی‌تواند باشد. برای بررسی سایر آنیون‌ها باید ساختار لوویس را رسم کنیم:



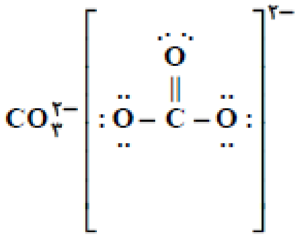
$\frac{۸}{۴} = ۲$



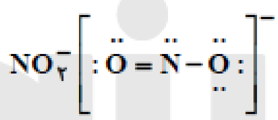
$\frac{۱۲}{۴} = ۳$



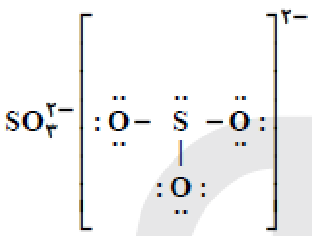
$\frac{۳}{۱} = ۳$



$\frac{۸}{۴} = ۲$



$\frac{۶}{۳} = ۲$



$\frac{۱۰}{۳}$

پس آنیون X می‌تواند، نیترات، نیتریت یا کربنات باشد.

**۴۲** پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

عبارت اول: نادرست؛ سولفات فراوان‌ترین آنیون چنداتمی محلول در آب دریا است.

عبارت دوم: نادرست؛ باریم‌نیترات محلول است باید مثلاً از یون سولفات استفاده کرد تا به حالت رسوب در بیاید.

عبارت سوم: درست؛ چون این یون‌ها به‌صورت رسوب جدا نمی‌شوند و محلول باقی می‌مانند.

$$3\,CaCl_2(aq) + 2Na_3PO_4(aq) \rightarrow 6\,NaCl(aq) + Ca_3(PO_4)_2(s)$$

عبارت چهارم: نادرست؛ مقدار بسیار کم و مناسب یون $F^{-}$ افزوده می‌شود.

عبارت پنجم: درست

**۴۳** پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل‌های ۲ و ۳)

اصلاح شده موارد نادرست:

اول: مس (I) اکسید    دوم: نقره‌سولفید

سوم: دی‌نیتروژن مونواکسید    چهارم آلومینیم فلوئورید

**۴۴_پاسخ: گزینهٔ ۳** ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

درصد جرمی در محلول سیرنشده اولیه را $X$ در نظر بگیریم، ۲۵۰ گرم از این محلول حاوی $2.5X$ گرم حل‌شونده و $(250-2.5X)$ گرم آب است:

انحلال‌پذیری از نسبت جرم حل‌شونده به جرم آب در محلول سیرشده ضرب در ۱۰۰ محاسبه می‌شود:

$$\frac{2.5X+130}{250-2.5X}\times 100=90 \Rightarrow 2.5X+130=225-2.25X \Rightarrow 4.75X=95 \Rightarrow X=20$$

**۴۵ - پاسخ: گزینهٔ ۴** ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$3\,MOH(aq)+FeCl_3(aq)\rightarrow Fe(OH)_3(s)+3\,MCl(aq)$$

$$0.5\,L\,MOH\times\frac{1000\,mL}{1\,L}\times\frac{1.12\,g\,MOH(aq)}{1\,mL\,MOH(aq)}\times\frac{20}{100}\times\frac{1\,mol\,MOH}{(x+17)\,g\,MOH}\times\frac{1\,mol\,Fe(OH)_3}{3\,mol\,MOH}\times\frac{107\,g\,Fe(OH)_3}{1\,mol\,Fe(OH)_3}=71.33\,g$$

$$\Rightarrow x=39\,g\cdot mol^{-1}\Rightarrow {}^{39}K$$

$$71.33\,g\,Fe(OH)_3\times\frac{1\,mol\,Fe(OH)_3}{107\,g\,Fe(OH)_3}\times\frac{1\,mol\,FeCl_3}{1\,mol\,Fe(OH)_3}=\frac{2}{3}\,mol\,FeCl_3$$

$$[FeCl_3]=\frac{\frac{2}{3}\,mol}{2\,L}=\frac{1}{3}\,\frac{mol}{L}=0.33\,\frac{mol}{L}$$

**۴۶ - پاسخ: گزینهٔ ۴** ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

$$5\,h\times\frac{10\,L}{1\,h}\times\frac{10^3\,g}{1\,L}\times\frac{x\,g\,HNO_3}{10^6\,g}\times\frac{1\,mol\,HNO_3}{63\,g\,HNO_3}=\frac{5x}{63}\times10^{-2}\,mol\,HNO_3$$

$$V_{\text{حجم کل}}=\underbrace{5\times10\,L}_{\text{پساب}}+\underbrace{200\,L}_{\text{آب}}=250\,L$$

$$10^{-3}\,\frac{mol}{L}=\frac{\frac{5x}{63}\times10^{-2}\,mol}{250\,L}\Rightarrow x=5\times63=315\,ppm$$

**۴۷** - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا انحلال‌پذیری در دمای $۳۰^{\circ}C$ را از درصد جرمی آن به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱۰۰}{۶}=\frac{S_۲}{۱۰۰+S_۲}\times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{S_۲}{۱۰۰+S_۲}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow S_۲=\frac{۲۰g}{۱۰۰g\,H_۲O}$$

حالا براساس میزان رسوب، می‌توان $S_۱$ را نیز محاسبه کرد، دقت کنیم که با افزایش دما رسوب ایجاده شده است و این یعنی معادلهٔ انحلال‌پذیری خطی با شیب منفی است. ($S_۱ > S_۲$)

$$۲۴۴g\,\text{محلول}\times\frac{(S_۱-S_۲)g\,\text{رسوب}}{(۱۰۰+S_۱)g\,\text{محلول}}=۴ \Rightarrow \overset{۶۱}{\cancel{۲۴۴}}\times\frac{S_۱-۲۰}{۱۰۰+S_۱}=\cancel{۴} \Rightarrow S_۱=۲۲\frac{g}{۱۰۰g\,H_۲O}$$

حال معادلهٔ خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\theta_۱=۱۰\\ S_۱=۲۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_۲=۳۰\\ S_۲=۲۰\end{cases}$$

$$a=\frac{\Delta S}{\Delta\theta}=\frac{-۲}{۲۰}=-۰/۱$$

$$(S-۲۲)=-۰/۱(\theta-۱۰) \Rightarrow S-۲۲=(-۰/۱\theta)+۱ \Rightarrow S=-۰/۱\theta+۲۳$$

$$a\cdot b=-۰/۱\times ۲۳=-۲/۳$$

**۴۸** - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

بررسی مقایسه‌های نادرست:

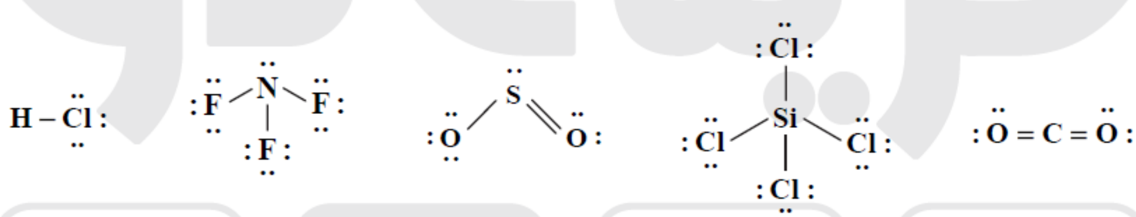
اول: نقطهٔ جوش: $HBr < HF$؛ به این دلیل که بین مولکول‌های $HF$ جاذبهٔ پیوند هیدروژنی برقرار است.

دوم: انحلال‌پذیری در آب: $N_۲ < O_۲$؛ هر دو انحلال مولکولی و مولکول‌های ناقطبی داشته و به‌دلیل جرم مولی بزرگ‌تر گاز اکسیژن، بیشتر در آب حل می‌شود.

چهارم: گشتاور دو قطبی: $H_۲O > H_۲S > CO_۲$

**۴۹** - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

الف) درست؛ $CO_۲$ و $SiCl_۴$ ناقطبی و $SO_۲$، $NF_۳$ و $HCl$ قطبی هستند و در میدان جهت‌گیری می‌کنند.



ب) نادرست؛ اتانول دارای پیوند هیدروژنی است و نسبت به استون نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

پ) درست؛ جرم مولی دو گاز نزدیک به یکدیگر است، اما دی‌متیل‌اتر قطبی است، پس نقطهٔ جوش بالاتری دارد و آسان‌تر مایع می‌شود.

ت) نادرست؛ در گروه ۱۴ $CH_۴$، $SiH_۴$ و $GeH_۴$ هیچ‌کدام امکان برقراری پیوند هیدروژنی ندارند.



ث) درست؛ جرم مولی هر دو برابر است، اما $CO$ قطبی و $N_۲$ ناقطبی است.

**۵۰** پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

عبارت اول: درست

$Al(NO_۳)_۳ \rightarrow Al^{۳+} + ۳NO_۳^-$ (۴ یون)

$BaCl_۲ \rightarrow Ba^{۲+} + ۲Cl^-$ (۳ یون)

$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$ (۲ یون)

عبارت دوم: نادرست؛ وجود نمک در آب باعث کاهش انحلال‌پذیری گازها می‌شود.

عبارت سوم: نادرست؛ به جای $Ca^{۲+}$ در عبارت باید $K^+$ قرار گیرد.

عبارت چهارم: نادرست؛ فرایند اسمز

عبارت پنجم: نادرست؛ برخلاف روش‌های اسمز معکوس و صافی کربن امکان جداسازی ترکیب‌های آلی فرار با تقطیر وجود ندارد.